数理解析研究所講究録
第1834巻 2013年 45-55

捩れを許す統計多様体とアファイン分布の幾何学

名古屋工業大学・大学院工学研究科　松添 博[1]
Hiroshi Matsuzoe
Graduate School of Engineering
Nagoya Institute of Technology

関西学院大学・理工学部　黒瀬 俊[2]
Takashi Kurose
School of Science and Technology
Kwansei Gakuin University

概 要

アファイン接続が捩れを持つ場合の統計多様体の幾何学と，アファイン分布の幾何学は，量子系の情報幾何学を定式化するために導入された．これまで統計多様体の幾何学とアファイン微分幾何学の関連は多く研究がなされている．一方，アファイン分布の幾何学は，微分幾何学的にはアファイン微分幾何学の非可積分・非対称系への一般化と考えることができる．本論文では捩れを許す統計多様体とアファイン分布の基本事項を紹介したのち，ダイバージェンス関数の微分版であるプレ・ダイバージェンス関数のアファイン分布を用いた構成などを述べる．

1 はじめに

統計的推論の幾何学的方法において，統計モデルはリーマン多様体の構造を持ち，互いに双対的なアファイン接続が有用であることが知られている．Lauritzen はこのリーマン計量と双対的なアフィン接続の対からなる構造を微分幾何学的に考察し，統計多様体の概念を導入した [La]．一方，このような幾何構造はアファイン超曲面論においても自然に現れ，古くから研究がなされていた．黒瀬は統計多様体の構造をアファイン微分幾何学の観点から考察し，統計多様体の概念を再定義した [Ku-1]．その後，統計多様体の幾何学はアファイン微分幾何学をはじめとするいろいろの観点から多くの研究がなされており，近年は統計多様体の共形幾何学も発展しつつある [Ku-2], [KTT], [AOM].

捩れを許す統計多様体とアファイン分布の幾何学は，量子系，または非可積分系への統計多様体の幾何学の一般化である．量子情報幾何学において，量子状態空間に自然に定義されるアファイン接続は捩れを持つことが知られている．黒瀬はこの捩れを持つ構造を定式化するために捩れを許す統計多様体の概念を導入した [Ku-2].

[1]本研究の一部は学術研究助成基金助成金 (若手研究 (B) 課題番号:23740047) の助成を受けたものである．
[2]本研究の一部は科学研究費補助金 (基盤研究 (C) 課題番号:22540107) の助成を受けたものである．

その後，逸見らの研究によって，非可積分推定関数の幾何学においても捩れを許す統計多様体の構造が現れることが分かった [HM].

本論文では，捩れを許す統計多様体やアファイン分布の幾何学の基本事項を紹介したのち，捩れを許す統計多様体の具体例や，ダイバージェンス関数の微分版であるプレ・ダイバージェンス関数のアファイン分布を用いた構成などを述べる．

2 統計多様体

本論文では煩雑さを避けるために，多様体とその上の諸量は全て滑らかであると仮定する．統計多様体と双対接続の定義を与えることから始める．より詳しい解説が [Ma-3], [Ma-4] などにある．

(M,h) を 擬リーマン多様体，∇ を M 上のアファイン接続とする．このとき ∇ の h に関する**双対接続** ∇^* を次の式で定義する．

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla^*_X Z),$$

ただし X, Y および Z は M 上の任意のベクトル場である．計量 h の対称性から $(\nabla^*)^* = \nabla$ が成り立つ．また $\nabla^{(0)} := (\nabla + \nabla^*)/2$ とすると $\nabla^{(0)}h = 0$ が成り立つ．ただし ∇ が捩れを持つ場合には $\nabla^{(0)}$ は Levi-Civita 接続とはならないことに注意する．

アファイン接続 ∇ の曲率テンソル場 R を

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

と定義する．∇ の双対接続 ∇^* の曲率テンソル場を R^* とすると

$$h(R(X,Y)Z, V) + h(Z, R^*(X,Y)V) = 0$$

が成り立つ．したがって $R=0$ と $R^*=0$ は同値である．

次にアファイン接続 ∇ の捩率テンソル場 T を

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

と定義する．捩率テンソル場 T が恒等的に消えるとき，∇ は**捩れがない**という．この場合，∇ は対称接続とよばれることもある．

以下，本章では ∇ が捩れを持たない場合を考える．

定義 1 (統計多様体 [Ku-1]) (M,h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上の捩れのないアファイン接続とする．このとき (M,∇,h) が**統計多様体**であるとは，∇h が対称な $(0,3)$-テンソル場となるとき，すなわち

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z)$$

が成り立つこととする．

統計多様体 (M, ∇, h) に対して，∇ の h に関する双対接続 ∇^* は捩れがなく，$\nabla^* h$ は対称となる．したがって (M, ∇^*, h) も統計多様体となるが，これを (M, ∇, h) の**双対統計多様体**とよぶ．

また，統計多様体に対して対称な $(0,3)$-テンソル場 $C(X, Y, Z) = (\nabla_X h)(Y, Z)$ が自然に定義される．この C を統計多様体 (M, ∇, h) の **3 次形式** とよぶ．逆に擬リーマン多様体 (M, h) と対称な $(0,3)$-テンソル場 C が与えられると

$$
\begin{aligned}
h(\nabla_X Y, Z) &= h(\nabla^{(0)}_X Y, Z) - \frac{1}{2} C(X, Y, Z), \\
h(\nabla^*_X Y, Z) &= h(\nabla^{(0)}_X Y, Z) + \frac{1}{2} C(X, Y, Z)
\end{aligned}
$$

によって，互いに双対的な捩れのないアファイン接続 ∇, ∇^* が定義できる．ただし $\nabla^{(0)}$ は h の Levi-Civita 接続である．さらに，∇h と $\nabla^* h$ はそれぞれ対称であり，統計多様体 (M, ∇, h), (M, ∇^*, h) が得られる．

もともとの統計多様体の定義は，リーマン多様体 (M, g) と対称な $(0,3)$-テンソル場 C の組 (M, g, C) ことであり，Lauritzen [La] によって導入された．上述のように，計量の符号を一般化していることを除けば 2 つの定義は同値である．本論文では次章で述べるアファイン微分幾何学との関連などから，擬リーマン多様体と捩れのないアファイン接続の組 (M, ∇, h) を統計多様体の定義として用いる．

統計多様体 (M, ∇, h) に対して アファイン接続 ∇ が平坦であるとき，すなわち，恒等的に $R = 0$, $T = 0$ が成り立つとき，(M, ∇, h) は **Hesse 多様体**とよばれる [S]．また，双対接続も合わせた組 (M, h, ∇, ∇^*) は**双対平坦空間**とよばれる．

3 コントラスト関数

この章では統計多様体で距離的な役割を果たすコントラスト関数についてまとめる．[Eg], [Ma-1] などに詳しい結果がある．

ρ を $M \times M$ 上の関数とする．このとき M 上の関数 ρ を次の式で定める．

$$
\rho[X_1 \cdots X_i | Y_1 \cdots Y_j](r) := (X_1)_p \cdots (X_i)_p (Y_1)_q \cdots (Y_j)_q \rho(p, q)|_{\substack{p=r \\ q=r}}.
$$

例えば $\rho[X|\,](r) = X_{(p)} \rho(p, q)|_{\substack{p=r \\ q=r}}$ や $\rho[X|Y](r) = X_{(p)} Y_{(q)} \rho(p, q)|_{\substack{p=r \\ q=r}}$ となる．

定義 2 (コントラスト関数) ρ を $M \times M$ 上の関数とする．ρ が次の性質を満たすとき，ρ を M 上の**コントラスト関数**とよぶ．

1. M の各点 p で $\rho(p, p) = 0$ が成り立つ．
2. $\rho[X|] = \rho[|X] = 0$ が成り立つ．
3. $h(X, Y) := -\rho[X|Y]$ は M 上の擬リーマン計量である．

ρ を M 上のコントラスト関数とし h を ρ から誘導された M 上の擬リーマン計量とする．このとき，互いに双対的なアファイン接続が次の式で定義できる．

$$
\begin{aligned}
h(\nabla_X Y, Z) &:= -\rho[XY|Z], \\
h(Y, \nabla^*_X Z) &:= -\rho[Y|XZ].
\end{aligned}
$$

このアファイン接続 ∇ と ∇^* は捩れがなく，h の共変微分 ∇h と $\nabla^* h$ は対称になる．したがって (M, ∇, h) と (M, ∇^*, h) は統計多様体であり，互いに双対的である．特に (M, ∇, h) をコントラスト関数 ρ から誘導された統計多様体とよぶことにする．

コントラスト関数からは統計多様体が誘導されるが，逆に任意の統計多様体はコントラスト関数を持つことも知られている．

4 アファインはめ込み

本章ではアファインはめ込みの幾何学を簡単にまとめる．アファインはめ込みに関する一般的な内容は [NS]，本論文に関連する結果については [Iv]，[Ku-1], [Ma-4] などがある．

M を n 次元多様体 $(n \geq 2)$，f を M から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ へのはめ込み，ξ を f に沿った（局所）ベクトル場とする．M の各点 p において，

$$T_{f(p)}\boldsymbol{R}^{n+1} = f_*(T_pM) \oplus \boldsymbol{R}\{\xi_p\} \tag{4.1}$$

という分解が成り立つとき，組 $\{f, \xi\}$ を M から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への**アファインはめ込み**という．また ξ を**横断的ベクトル場**という．

D を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準アファイン接続とし，はめ込み f に沿ったアファイン接続も D と同一視する．ここで (4.1) という接空間の分解に応じて

$$\text{Gauss の公式：} \quad D_X f_* Y = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, \tag{4.2}$$

$$\text{Weingarten の公式：} \quad D_X \xi = -f_*(SX) + \tau(X)\xi \tag{4.3}$$

が成り立ち，M に ∇, h などの諸量が誘導される．アファイン接続 ∇ を**誘導接続**，$(0,2)$-テンソル場 h を**アファイン基本形式**，$(1,1)$-テンソル場 S を**アファイン型作用素**，1 次微分形式 τ を**横断的接続形式**という．h は情報幾何学では埋め込み曲率とよばれるものに相当するが，h は横断的ベクトル場の取り方に依存するので注意が必要である．

アファインはめ込みについて，次の基本的な性質が成り立つ．

命題 4.1 $\{f, \xi\}$ と $\{\bar{f}, \bar{\xi}\}$ をアファインはめ込みとする．アファインはめ込みから M 誘導される諸量が一致するとき，すなわち

$$\nabla = \bar{\nabla},\ h = \bar{h},\ S = \bar{S},\ \text{および}\ \tau = \bar{\tau}$$

が成り立つとき，2 つのアファインはめ込みはアファイン的に合同である．

アファイン基本形式 h が非退化であるという性質は，横断的ベクトル場 ξ の取り方に依らない．そこで h が非退化のとき，はめ込み f を**非退化**という．また横断的接続形式 $\tau = 0$ のとき，アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ を**等積**とよぶことにする．

ここで「等積」という言葉の由来は次の通りである．まずアファインはめ込み $\{f,\xi\}$ に関する**誘導体積要素**（M 上の n 次微分形式）π を

$$\pi(X_1,\ldots,X_n) := \det(X_1,\ldots,X_n,\xi)$$

によって定める．ただし det は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の標準体積要素である．この π の共変微分は

$$(\nabla_Y\pi)(X_1,\ldots,X_n) = \tau(Y)\pi(X_1,\ldots,X_n)$$

となる．すなわち $\tau = 0$ であれば，誘導体積要素 π は ∇ に関して平行である．これは M 上に一様体積要素が与えられたことを意味する．

アファインはめ込み $\{f,\xi\}$ が等積であることと，誘導接続 ∇ の Ricci テンソル $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\{X \mapsto R(X,Y)Z\}$ が対称であることが同値であることが知られている．

アファインはめ込みの基本構造方程式（部分多様体論における可積分条件）は，次のようになる．

$$\begin{array}{rl}
\text{Gauss 方程式}: & R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY \\
\text{Codazzi 方程式}: & (\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z) + \tau(Y)h(X,Z) \\
 & (\nabla_X S)(Y) - \tau(X)SY = (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)SX \\
\text{Ricci 方程式}: & \begin{aligned} h(X,SY) - h(Y,SX) &= (\nabla_X\tau)(Y) - (\nabla_Y\tau)(X) \\ &= d\tau(X,Y) \end{aligned}
\end{array}$$

Codazzi 方程式から，次の命題が成り立つ．

命題 4.2 アファインはめ込み $\{f,\xi\}$ が等積であれば，(M,∇,h) は統計多様体である．

さらに，誘導接続 ∇ の双対接続 ∇^* は射影的に平坦であることが知られている．逆に統計多様体 (M,∇,h) が単連結で，双対接続 ∇^* が射影的に平坦であるとき，与えられた統計多様体 (M,∇,h) を誘導するようなアファインはめ込み $\{f,\xi\}$ が構成できる [DNV], [Iv], [Ku-1].

次に，アファインはめ込みの余法線写像を定義し，双対接続との関係を考える．

$\{f,\xi\}: M \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ をアファインはめ込み，$\boldsymbol{R}_{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の双対空間とする．M の各点 p に対し $\{f,\xi\}$ の**余法線写像** $v: M \to \boldsymbol{R}_{n+1}$ を

$$\langle v(p), \xi_p\rangle = 1, \quad \langle v(p), f_*X_p\rangle = 0$$

によって定義する．この式を微分すると，公式 (4.2) と (4.3) から

$$\langle v_*X_p, \xi_p\rangle = -\tau(X), \quad \langle v_*X_p, f_*Y_p\rangle = -h(X,Y) \tag{4.4}$$

が得られる．したがって h が非退化であれば，v は M から $\boldsymbol{R}_{n+1}$ へのはめ込みであり，v は v 自身に横断的である．よって $\{v,-v\}$ は M から $\boldsymbol{R}_{n+1}$ へのアファイ

ンはめ込みである．(横断的ベクトル場がはめ込み自身であることから，$\{v,-v\}$ は中心アファインはめ込みとよばれる.）さらに

$$D_X v_* Y = v_*(\hat{\nabla}^*_X Y) - h^*(X,Y)v$$

によって $\{v,-v\}$ に関する誘導接続を定義すると，(4.4) などを用いて

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \hat{\nabla}^*_X Z) + \tau(Y)h(X,Z) \tag{4.5}$$

が成り立つ．関係式 (4.5) から，$\hat{\nabla}^*$ は ∇ の h に関する準双対接続とよばれることもある．(双対接続の一般化については，[Ma-2], [Ma-3], [No] などを参照されたい.）特に $\{f,\xi\}$ が非退化等積アファインはめ込みであれば，$\hat{\nabla}^*$ は ∇ の双対接続である．

この章の最後に，アファインはめ込みを用いてダイバージェンス関数を定義する．

$\{f,\xi\}$ を非退化等積アファインはめ込み，v を $\{f,\xi\}$ の余法線写像とする．$M\times M$ 上の関数 ρ を

$$\rho(p,q) = \langle v(p), f(p) - f(q)\rangle$$

によって定義し，ρ を (M,∇,h) の**幾何学的ダイバージェンス**とよぶ [Ku-1]．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ に実現される統計多様体 (M,∇,h) が与えられば，幾何学的ダイバージェンス ρ は (M,∇,h) を誘導するコントラスト関数であり，統計多様体の実現の与え方に依らず一意的に定まる．

特に (M,∇,h) が Hesse 多様体，すなわち (M,h,∇,∇^*) が双対平坦空間であれば，幾何学的ダイバージェンスは双対平坦空間上のカノニカル・ダイバージェンス [AN] と一致する．

5　捩れを許す統計多様体

量子系の情報幾何学や、非可積分推定関数の幾何学を考えると，アファイン接続が捩れを持つ場合が生じることが知られている [Ku-3], [HM]．そこでこの章では，アファイン接続が捩れを持つ場合への統計多様体の一般化を考える．

定義 3 (捩れを許す統計多様体 [Ku-3]) (M,h) を疑リーマン多様体，∇ を M 上のアファイン接続とし，T を ∇ の捩率テンソル場とする．

$$(\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) = -h(T(X,Y),Z)$$

が成り立つとき，(M,∇,h) を**捩れを許す統計多様体**という．

∇ の h に関する双対接続 ∇^* は捩れを持たない．したがって，捩れを許す統計多様体は以下のように解釈もできる．

命題 5.1 (M,h) を疑リーマン多様体，∇^* を M 上の捩れのないアファイン接続とする．また ∇ を ∇^* の h に関する双対接続とする．このとき (M,∇,h) は捩れを許す統計多様体となる．

捩れを許す統計多様体 (M,∇,h) に対し，適当な 1 次微分形式 τ が存在して ∇ の捩率テンソル場が

$$T(X,Y)=\tau(Y)X-\tau(X)Y$$

と表示できるとき，(M,∇,h) を**自明な**捩れを許す統計多様体とよぶ．この場合，$\hat{\nabla}_XY:=\nabla_XY-\tau(Y)X$ とおくと $\hat{\nabla}$ は捩れのないアファイン接続であり，

$$Xh(Y,Z)=h(\hat{\nabla}_XY,Z)+h(Y,\nabla^*_XZ)+\tau(Y)h(X,Z)$$

が成り立つ．したがって ∇ の h に関する双対接続 ∇^* は，$\hat{\nabla}$ から見ると準双対接続であり，前章で述べたようにアファインはめ込みの理論にも自然に現れる．このように統計多様体の一般化は，双対接続の一般化にも関連していることを注意されたい [Ma-3].

捩れを許す統計多様体 (M,∇,h) に対して，∇ の曲率テンソル場が $R=0$ となるとき，(M,∇,h) を**遠隔平行性空間**とよぶことにする．

6　プレ・コントラスト関数

コントラスト関数の微分版であるプレ・コントラスト関数を導入し，捩れを許す統計多様体との関係を調べる．

ρ を $TM\times M$ 上の関数とする．コントラスト関数の場合と同様な手順で，M 上の関数を次式で定義する．

$$\rho[X_1\cdots X_iZ|Y_1\cdots Y_j](r):=(X_1)_p\cdots(X_i)_p(Y_1)_q\cdots(Y_j)_q\rho(Z_p,q)|_{\substack{p=r\\q=r}}.$$

例えば $\rho[XZ|\,](r)=X_{(p)}\rho(Z_p,q)|_{\substack{p=r\\q=r}}$ である．

定義 4 (プレ・コントラスト関数) ρ を $TM\times M$ 上の関数とする．ρ が次の性質を満たすとき，ρ を M 上の**プレ・コントラスト関数**とよぶ．

1. $\rho(f_1X_1+f_2X_2,q)=f_1\rho(X_1,q)+f_2\rho(X_2,q)$，ただし f_1 と f_2 は M 上の関数である．
2. $\rho[X|\,]=0$，すなわち $\rho(X_p,p)=0$ が成り立つ．
3. $h(X,Y):=-\rho[X|Y]$ は M 上の擬リーマン計量である．

$\rho(p,q)$ が M 上のコントラスト関数であるとき，その微分 $\tilde{\rho}(X_p,q):=X_p\rho(p,q)$ は M 上のプレ・コントラスト関数である．

プレ・コントラスト関数 ρ からアファイン接続 ∇ と ∇^* が

$$\begin{aligned} h(\nabla_XY,Z) &:= -\rho[XY|Z], \\ h(Y,\nabla^*_XZ) &:= -\rho[Y|XZ]. \end{aligned} \tag{6.1}$$

によって定義される.

$$\begin{aligned} Xh(Y,Z) &= -X\rho[Y|Z] = -\rho[XY|Z] - \rho[Y|XZ] \\ &= h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla^*_X Z), \\ h(Y, \nabla^*_X Z - \nabla^*_Z X) &= -\rho[Y|XZ] + \rho[Y|ZX] \\ &= -\rho[Y|[X,Z]] \ = \ h(Y,[X,Z]) \end{aligned}$$

となるので, ∇ と ∇^* は h に関して双対的であり, ∇^* は捩れのないアファイン接続である. 一方, 一般には $\rho[XY|Z] - \rho[YX|Z] \neq -h([X,Y],Z)$ となるので ∇ は捩れを持つ. したがって, 次が成り立つ.

命題 6.1 ρ を M 上のプレ・コントラスト関数とする. h を ρ から誘導される擬リーマン計量, ∇ を ρ から (6.1) によって誘導されるアファイン接続とする. このとき (M,∇,h) は捩れを許す統計多様体である.

7 アファイン分布

M を n 次元多様体, ω を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に値をとる M 上の 1 次微分形式, ξ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に値をとる M 上の関数とする. M の各点 p において

$$\boldsymbol{R}^{n+1} = \mathrm{Image}\ \omega_p \oplus \boldsymbol{R}\{\xi_x\}$$

という分解が成り立つとき, 組 $\{\omega,\xi\}$ を**アファイン分布**とよぶ. また ξ を**横断的ベクトル場**とよぶことにする. $\{f,\xi\}$ が M から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みであれば, $\{df,\xi\}$ はアファイン分布である.

$$\begin{aligned} X\omega(Y) &= \omega(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi, \\ X\xi &= -\omega(SX) + \tau(X)\xi \end{aligned}$$

によって, M に ∇, h, S, τ が誘導できる. アファインはめ込みの場合と同様に, ∇ を**誘導接続**, h を**アファイン基本形式**とよぶことにする. 一般には誘導接続 ∇ は捩れを持ち, アファイン基本形式 h は対称とは限らない.

命題 7.1 アファイン分布 $\{\omega,\xi\}$ に対して, 次が成り立つ.

1. 誘導接続 ∇ が捩れを持たないための必要十分条件は Image $d\omega_p \subset \mathrm{Span}\{\xi_p\}$ が成り立つことである.
2. アファイン基本形式 h が対称であるための必要十分条件は Image $d\omega_p \subset$ Image ω_p が成り立つことである.

アファイン基本形式 h が対称であるとき, ω を**対称**, h が非退化であるとき ω を**非退化**とよぶ. 分布 ω の対称性と非退化性は横断的ベクトル場 ξ の取り方に依らない. 実際, 次が成り立つ.

命題 7.2 $\{\omega,\xi\}$ をアファイン分布とする．横断的ベクトル場を $\tilde{\xi} := \omega(V) + \phi\xi$ と取り替えると，誘導接続などは次のように変化する．ただし V は M 上のベクトル場，ϕ は M 上の関数である．

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{h}(X,Y)V, \\ h(X,Y) &= \phi\tilde{h}(X,Y), \\ \tilde{S}X - \tilde{\tau}(X)V &= \phi SX - \nabla_X V, \\ \phi\tilde{\tau}(X) &= h(X,V) + d\phi(X) + \phi\tau(X). \end{aligned}$$

横断的接続形式が $\tau = 0$ であるとき，アファイン分布 $\{\omega,\xi\}$ を**等積**とよぶ．

命題 7.3 アファイン分布 $\{\omega,\xi\}$ が等積であるための必要十分条件は Image $(d\xi)_p \subset$ Image ω_p が成り立つことである．

アファイン分布に関する結果が述べられている論文のうち，[Ku-3] のアファイン分布の定義は，本論文の対称等積アファイン分布に対応する．[Ma-4] の定義は，本論文の対称アファイン分布に対応する．

アファインはめ込みの場合と同様に，アファイン分布に関しても Gauss 方程式や Codazzi 方程式などの基本構造方程式が成り立つ．

Gauss 方程式:

$$R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY,$$

Codazzi 方程式:

$$\begin{aligned} &(\nabla_X h)(Y,Z) + h(Y,Z)\tau(X) \\ &\qquad -(\nabla_Y h)(X,Z) + h(X,Z)\tau(Y) = -h(T^{\nabla}(X,Y),Z), \\ &(\nabla_X S)(Y) + \tau(Y)SX - (\nabla_Y S)(X) - \tau(X)SY = -S(T^{\nabla}(X,Y)), \end{aligned}$$

Ricci 方程式:

$$h(X,SY) - (\nabla_X\tau)(Y) - h(Y,SX) + (\nabla_Y\tau)(X) = \tau(T^{\nabla}(X,Y)).$$

アファインはめ込みの場合と同様に，Codazzi 方程式から次の命題が成り立つ．

命題 7.4 $\{\omega,\xi\}$ が非退化等積アファイン分布であるとき，誘導接続 ∇ とアファイン基本形式 h に関して (M,∇,h) は捩れを許す統計多様体となる．

ここで，アファイン分布の例を挙げておく．

例 7.5 (SLD Fisher 計量 [Ku-3]) Herm(d) を d 次エルミート行列の全体とし，$\mathcal{S}$ を次で定まる正定値エルミート行列の集合とする：

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathrm{Herm}(d) \mid P > 0,\ \mathrm{tr}P = 1\}.$$

各 $P \in \mathcal{S}$ に対し，接空間 $T_P\mathcal{S}$ をトレースが 0 となるエルミート行列の全体 $\mathcal{A}_0$

$$\mathcal{A}_0 = \{X \in \mathrm{Herm}(d) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$$

と同一視する．$X \in \mathcal{A}_0$ に対し，対応する $\mathcal{S}$ 上のベクトル場を $\widetilde{X}$ と表記する．

各 $P \in \mathcal{S}$ と $X \in \mathcal{A}_0$ に対し，$\omega_P(\widetilde{X}) \in \mathrm{Herm}(d)$ と ξ を次式で定義する．

$$X = \frac{1}{2}(P\omega_P(\widetilde{X}) + \omega_P(\widetilde{X})P), \quad \xi = -I_d.$$

このとき，ω は $\mathcal{S}$ 上の $\mathrm{Herm}(d)$ に値をとる 1 次微分形式であり，$\{\omega, \xi\}$ は対称等積アファイン分布を与える．

誘導接続 ∇ とアファイン基本形式 g は，それぞれ

$$\begin{aligned} g_P(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(P(\omega_P(\widetilde{X})\omega_P(\widetilde{Y}) + \omega_P(\widetilde{Y})\omega_P(\widetilde{X}))\right), \\ \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)_P &= \left(h_P(\widetilde{X}, \widetilde{Y})P - \frac{1}{2}(X\omega_P(\widetilde{Y}) + \omega_P(\widetilde{Y})X)\right)^{\sim} \end{aligned}$$

となる．ω は量子情報理論において対称対数微分，g は SLD Fisher 計量とよばれているものである．実際，g を局所座標系を用いて成分表示すると

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathrm{tr}\{(\partial_i P)\omega_j\} = \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}(P\omega_i\omega_j + \omega_i P\omega_j)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{P(\omega_i\omega_j + \omega_j\omega_i)\} \end{aligned}$$

である．また ∇ が捩れを持つこともすぐに確かめられる．一方，横断的ベクトルの選び方や Gauss 方程式などから，$R = 0$ であることがわかる．

したがって $(\mathcal{S}, \nabla, g)$ は捩れを許す統計多様体となるが，特に遠隔平行性空間である．

次に，アファイン分布から定まる幾何学的プレ・ダイバージェンスを定義する．

$\{\omega, \xi\}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への対称非退化等積アファイン分布とし，$\boldsymbol{R}_{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の双対空間とする．M の各点 p に対し，$\{\omega, \xi\}$ の**余法線写像** $v : M \to \boldsymbol{R}_{n+1}$ を次の式で定義する．

$$\langle v(p), \xi_p \rangle = 1, \quad \langle v(p), \omega_p(X) \rangle = 0.$$

余法線写像は接ベクトルと横断的ベクトル場を用いて定義された写像であったので，アファイン分布の場合でも同様に定義できる．h が非退化であることから，v は M から $\boldsymbol{R}_{n+1}$ へのはめ込みとなり，$\{v, -v\}$ は ∇ の h に関する双対接続 ∇^* を誘導するアファインはめ込みとなる．

対称非退化等積アファイン分布 $\{\omega, \xi\}$ とその余法線写像 v に対し，$TM \times M$ 上の関数 ρ を

$$\rho(X, q) = \langle v(p), \omega_p(X) \rangle$$

によって定義する．ρ を M の**幾何学的プレ・ダイバージェンス**とよぶ．

幾何学的プレ・ダイバージェンスは，捩れを許す統計多様体 (M, ∇, h) を誘導するプレ・コントラスト関数である．

参考文献

[AN] S. Amari and H. Nagaoka, *Method of information geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[AOM] S. Amari, A. Ohara and H. Matsuzoe, *Geometry of Deformed Exponential Families: Invariant, Dually-Flat and Conformal Geometry*, Physica A., **391**(2012), 4308-4319

[DNV] F. Dillen, K. Nomizu and L. Vranken, *Conjugate connections and Radon's theorem in affine differential geometry*, Monatsh. Math., **109**(1990), 221–235.

[Eg] S. Eguchi, *Geometry of minimum contrast*, Hiroshima Math. J., **22**(1992), 631–647.

[HM] M. Henmi and H. Matsuzoe, *Geometry of pre-contrast functions and non-conservative estimating functions*, AIP Conference Proceedings Volume 1340: International Workshop on Complex Structures, Integrability and Vector Fields, Amer. Inst. of Physics, **1340**(2011), 32-41.

[Iv] S. Ivanov, *On dual-projectively flat affine connections*, J. Geom., **53**(1995), 89–99.

[KTT] M. Kumon, A. Takemura, and K. Takeuchi, *Conformal Geometry of Statistical Manifold with Application to Sequential Estimation*, Sequential Anal., **30**(2011), 308-337.

[Ku-1] T. Kurose, *On the divergences of 1-conformally flat statistical manifolds*, Tôhoku Math. J., **46**(1994), 427–433.

[Ku-2] T. Kurose, *Conformal-projective geometry of statistical manifolds*, Interdiscip. Inform. Sci., **8**(2002), 89–100.

[Ku-3] 黒瀬 俊, *Statistical manifolds admitting torsion*, 2007 年度福岡大学微分幾何研究会講演録, 2007.

[La] S. L. Lauritzen, *Statistical manifolds*, Differential Geometry in Statistical Inferences, IMS Lecture Notes Monograph Series 10, Institute of Mathematical Statistics, Hayward California, (1987), 96–163.

[Ma-1] H. Matsuzoe, *Geometry of contrast functions and conformal geometry*, Hiroshima Math. J., **29**(1999), 175 – 191.

[Ma-2] H. Matsuzoe, *Geometry of statistical manifolds and its generalization*, Proceedings of the 8th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, World Scientific, (2007), 244–251.

[Ma-3] 松添 博, 古典的統計多様体からのいくつかの拡張, 京都大学数理解析研究所講究録, **1623**(2009), 12-21.

[Ma-4] H. Matsuzoe, *Statistical manifolds and affine differential geometry*, Adv. Stud. Pure Math., **57**(2010), 303-321.

[No] K. Nomizu, *Affine connectoins and their use*, Geometry and Topology of Submanifolds VII, ed. F. Dillen, World Scientific, (1995), 197–203.

[NS] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential geometry – Geometry of Affine Immersions –*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[S] H. Shima, *The Geometry of Hessian Structures*, World Scientific, 2007.